

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

PHÂN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- Định lý cực trị

g **Điều kiện cần** : Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực đại tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

g **Điều kiện đủ** :

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm sang dương** khi x đi qua điểm x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương sang âm** khi x đi qua điểm x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm x_0 .

g **Định lý 3**: Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

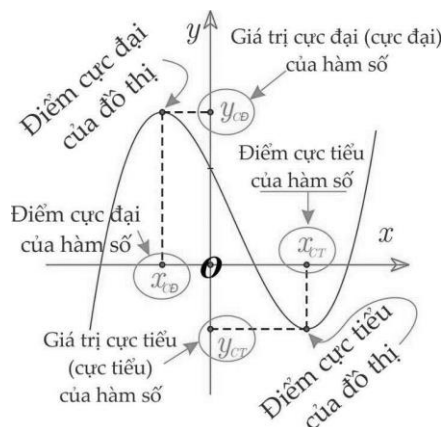
Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

g Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$

(hay y_{CD} hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

g Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$



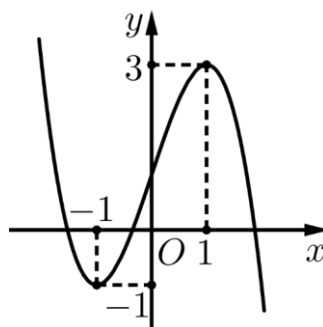
♦ Dựa vào bảng biến thiên:

- Nếu x qua điểm x_0 mà $f'(x)$ đổi từ dấu $(+)$ sang dấu $(-)$ thì x_0 là điểm cực đại.
 - Nếu x qua điểm x_0 mà $f'(x)$ đổi từ dấu $(-)$ sang dấu $(+)$ thì x_0 là điểm cực tiểu.
- (số lần đổi dấu của $f'(x)$ chính bằng số điểm cực trị của hàm số)

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **Câu 26 (101-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:

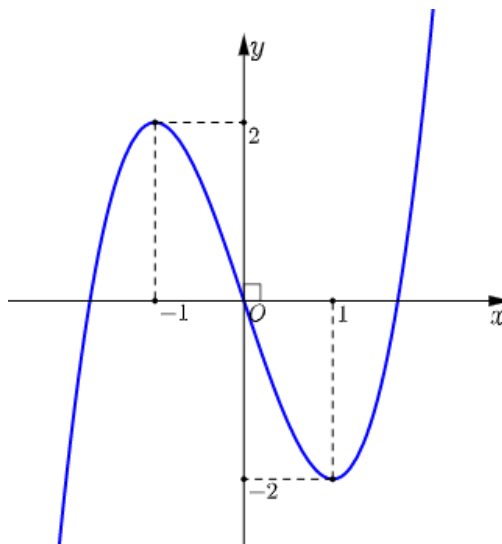


- A. 0. B. 1. **C. 3.** D. -1.

Lời giải

Giá trị cực đại của hàm số là 3.

Câu 2: **Câu 12 (102-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình bên.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 1$.

B. $x = -2$.

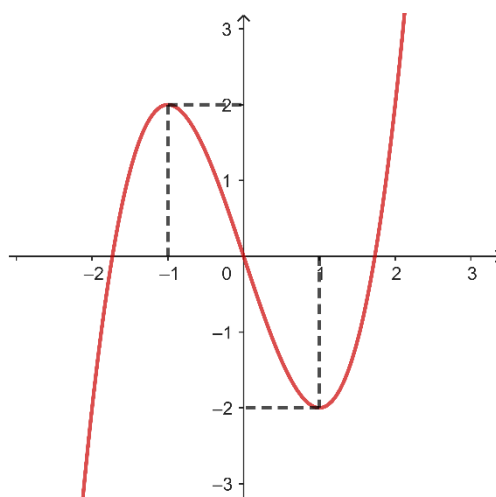
C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 1$.

Câu 3: **Câu 3 (103-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. $x = 1$.

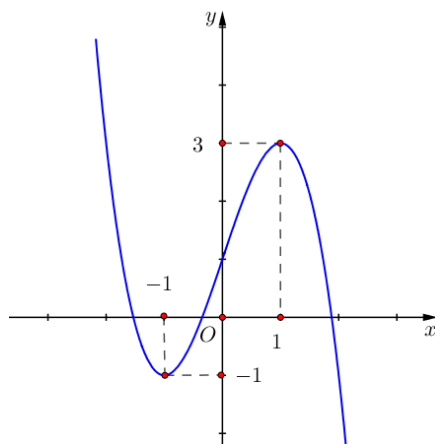
B. -2 .

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Câu 4: **Câu 9 (104-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3.

B. 0.

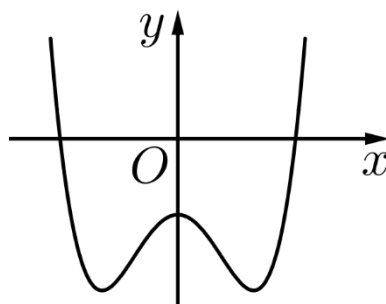
C. -1.

D. 1.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Câu 5: **Câu 28 (101-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. 1.

B. 3.

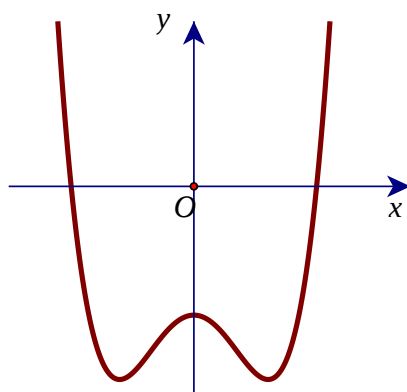
C. 0.

D. 2.

Lời giải

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

Câu 6: **Câu 23 (104-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Số cực tiểu là 2.

Câu 7: **Câu 24 (102-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Xét phương trình $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Câu 8: **Câu 21 (103-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Do $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta lập được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

VD-VDC-CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 9: **Câu 41 (101-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$?

A. 16.

B. 6.

C. 17.

D. 7.

Lời giải

$$y' = -3x^2 + 6x - 3m$$

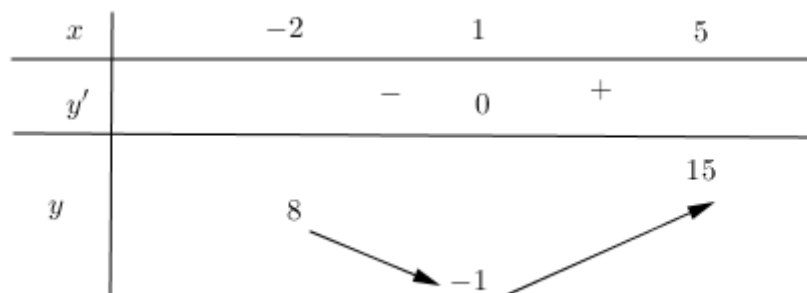
hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$ khi và chỉ khi

$$y' = 0 \text{ có một nghiệm thuộc khoảng } (-2; 5) \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0 \text{ có một nghiệm thuộc khoảng } (-2; 5)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = -m$$

$$g(x) = x^2 - 2x \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



Để hàm số có 1 cực trị $\Rightarrow 8 \leq -m < 15 \Leftrightarrow -15 < m \leq -8 \Rightarrow m \in \{-14; -13; -12; -11; -10; -9; -8\}$

Câu 10: Câu 40 (102-2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$?

A. 24.

B. 25.

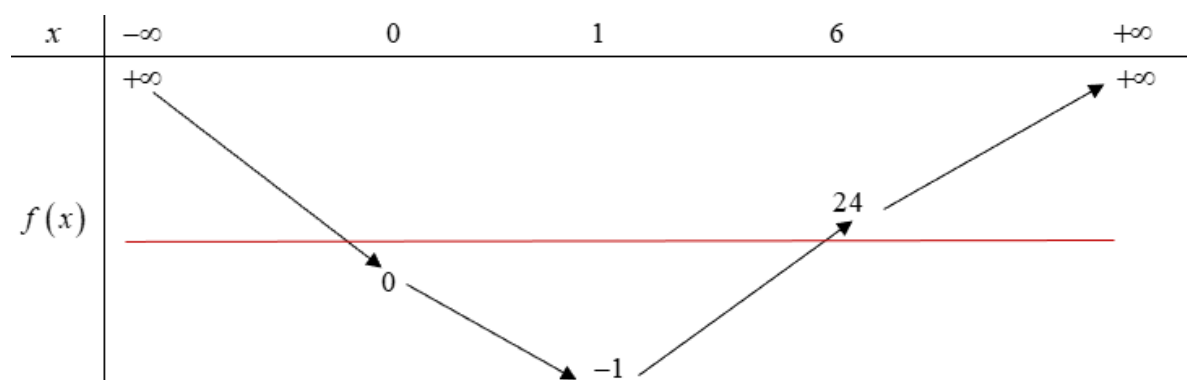
C. 26.

D. 23.

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 2x - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x = m \quad (*)$.

BBT cho hàm số $f(x)$



Hàm số có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$ khi $0 \leq m < 24$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; \dots; 23\}$. Vậy có tất cả 24 giá trị nguyên của m .

Câu 11: Câu 39 (103-2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 8)$?

A. 26.

B. 36.

C. 35.

D. 27.

Lời giải

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3} \Rightarrow y' = -x^2 + 4x + m.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow m = x^2 - 4x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^2 - 4x \Rightarrow g'(x) = 2x - 4.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	-1	2	8
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	5		32

Hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 8)$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm bội lẻ thuộc khoảng $(-1; 8)$.

Suy ra $5 \leq m < 32$.

Câu 12: **Câu 41 (104-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + \frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 5)$?

A. 17.

B. 12.

C. 16.

D. 11.

Lời giải

Cách 1: $y' = 3x^2 - 6x + 3m$

$$\Delta' = 9 - 9m$$

$y' = 3x^2 - 6x + 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2) \Leftrightarrow 9 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

$$m < 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 9m}}{3} = 1 - \sqrt{1 - m}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 9m}}{3} = 1 + \sqrt{1 - m}$$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + \frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 5)$ khi và chỉ khi

TH1.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -1 < x_1 < 5 \leq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -1 < 1 - \sqrt{1 - m} < 5 \\ 5 \leq 1 + \sqrt{1 - m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -2 < -\sqrt{1 - m} < 4 \\ \sqrt{1 - m} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2 > \sqrt{1 - m} > -4 \\ \sqrt{1 - m} \geq 4 \end{cases} \text{Loại.}$$

TH2.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 \leq -1 < x_2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -1 < 1 + \sqrt{1 - m} < 5 \\ 1 - \sqrt{1 - m} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -2 < \sqrt{1 - m} < 4 \\ \sqrt{1 - m} \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2 \leq \sqrt{1 - m} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 4 \leq 1 - m < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -3 \geq m > -15 \end{cases} \Leftrightarrow -15 < m \leq -3$$

$$\Rightarrow m \in \{-14; -13; -12; -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}$$

Cách 2:

$$y' = 3x^2 - 6x + 3m$$

YCBT $\Leftrightarrow$ PT $3x^2 - 6x + 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 5)$.

$$\text{Xét } 3x^2 - 6x + 3m = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x = -m.$$

Hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ có $f'(x) = 2x - 2$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	3	-1	15	

Từ BBT suy ra điều kiện $3 \leq -m < 15 \Leftrightarrow -15 < m \leq -3 \Rightarrow m \in \{-14; -13; \dots; -3\}$. Vậy có 12 giá trị thỏa mãn.

Câu 13: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						
	$-\infty$		2		-2	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = -1$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$

Câu 14: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

$-\infty$

2

$-\infty$

-2

2

-2

2

-2

$-\infty$

2

-2

$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 2$.

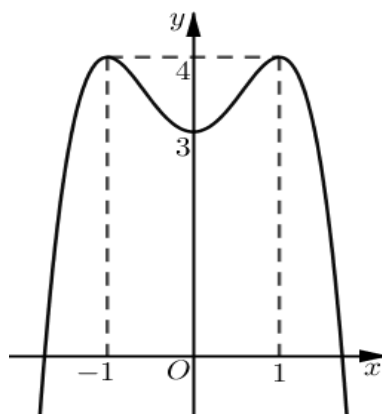
D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có điểm cực tiểu là $x = 1$.

Câu 15: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



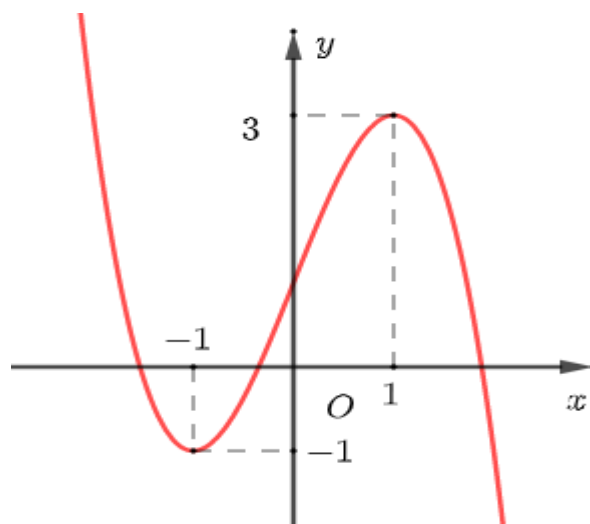
- A. 1. B. 4. C. -1. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 3.

Câu 16: (MĐ 103-2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



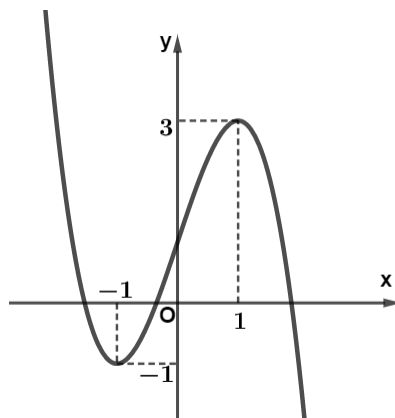
- A. $(1; -1)$. B. $(3; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $(-1; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(-1; -1)$.

Câu 17: (MĐ 104-2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



A. (1;3).

B. (3;1).

C. (-1;-1).

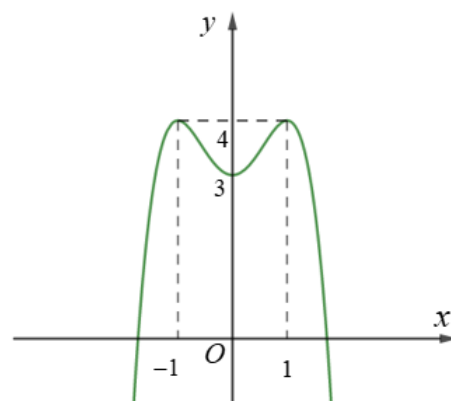
D. (1;-1).

Lời giải

Chọn C

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(-1; -1)$.

Câu 18: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



A. 3.

B. 4.

C. -1.

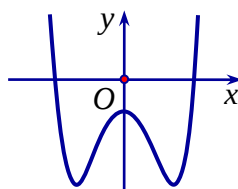
D. 1.

Lời giải

Chọn A

Giá trị cực tiểu: $y_{CT} = 3$.

Câu 19: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

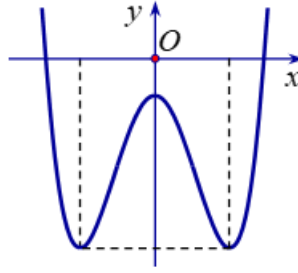
D. 0.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 20: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 0. C. 2. **D. 3.**

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 21: (MĐ 101-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

- A. 5. B. 6. **C. 12.** D. 11.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 64x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4mx + 64$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx + 64 = 0 \Rightarrow m = x^2 + \frac{16}{x}$.

Đặt $g(x) = x^2 + \frac{16}{x} \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$				
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2mx^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2mx + 64 = 0 \end{cases}$.

Suy ra $x^3 - 2mx + 64 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}x^2 + \frac{32}{x}$.

Đặt $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{32}{x} \Rightarrow h'(x) = x - \frac{32}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt[3]{4}$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$	0	$2\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
h'(x)				
h(x)	$+\infty$	$+\infty$	$12\sqrt[3]{2}$	$+\infty$

Nhận xét: Số cực trị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số cực trị hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó yêu cầu bài toán suy ra hàm số $y = f(x)$ có 1 cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có 2

$$\text{nghiệm bội lẻ } \begin{cases} m \leq 12 \\ m \leq 12\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 12.$$

Vì tham số m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn.

Câu 22: (MĐ 102-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + 2ax^2 + 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 2.

B. 6.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 2ax^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4ax + 8$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4ax + 8 = 0 \Rightarrow a = -x^2 - \frac{2}{x}$.

Đặt $g(x) = -x^2 - \frac{2}{x} \Rightarrow g'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

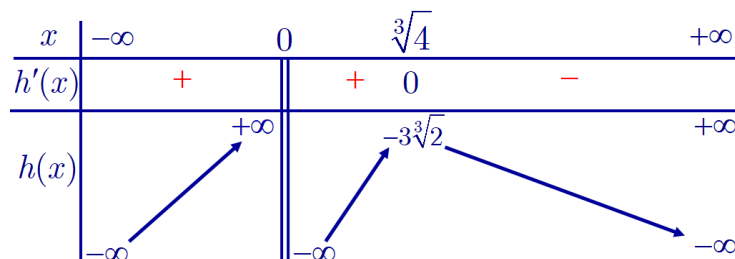
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	-3	$+\infty$

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2ax^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 2ax + 8 = 0 \end{cases}$.

Xét phương trình $x^3 + 2ax + 8 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x}$.

$$\text{Đặt } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x} \Rightarrow h'(x) = -x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}.$$

Bảng biến thiên



Nhận xét: Số cực trị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số cực trị hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó yêu cầu bài toán suy ra hàm số $y = f(x)$ có 1 cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có 2

$$\text{nghiệm bội lẻ } \begin{cases} a \geq -3 \\ a > -3\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \geq -3.$$

Vì tham số a nguyên âm nên $a \in \{-1; -2; -3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm của tham số a thỏa mãn.

Câu 23: (MĐ 103-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 - 8x$; $f'(x) = 4x^3 + 2ax - 8$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + ax - 8 = 0 \end{cases}$$

Vì phương trình bậc ba luôn có tối thiểu 1 nghiệm nên để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng ba điểm cực trị thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm bội lẻ.

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 + ax - 8 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + a.$$

Để $g(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất $\neq 0$ (1)

TH1: $3x^2 + a = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow a \geq 0$

$$\text{TH2: } 3x^2 + a = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{-a}{3}} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} g\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) > 0 \\ g\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} + a\sqrt{-\frac{a}{3}} - 8 > 0 \\ \frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} - a\sqrt{-\frac{a}{3}} - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{-\frac{a}{3}} > 6 \text{ (sai)} \\ a > -3\sqrt[3]{16} \end{cases}$$

Suy ra $a > -3\sqrt[3]{16}$

Để $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm bội lẻ (2)

TH1: $12x^2 + 2a = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow a \geq 0$

TH2: $12x^2 + 2a = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{-a}{6}} \end{cases}$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(\sqrt{-\frac{a}{6}}\right) \geq 0 \\ f'\left(-\sqrt{-\frac{a}{6}}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\frac{a}{6}\sqrt{-\frac{a}{6}} + 2a\sqrt{-\frac{a}{6}} - 8 \geq 0 \\ 4\frac{a}{6}\sqrt{-\frac{a}{6}} - 2a\sqrt{-\frac{a}{6}} - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{-\frac{a}{6}} \geq 6 \text{ (sai)} \\ a \geq -6 \end{cases}$$

Suy ra $a \geq -6$

Vậy $a \geq -6$ thỏa ycbt với $a \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Cách 2:

$$y = |x^4 + ax^2 - 8x|$$

$$y' = \frac{(x^4 + ax^2 - 8x)(4x^3 + 2ax - 8)}{|x^4 + ax^2 - 8x|} = \frac{2x(x^3 + ax - 8)(2x^3 + ax - 4)}{|x^4 + ax^2 - 8x|}$$

Để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng ba điểm cực trị $\Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Vì $x = 0$ không là nghiệm của các phương trình $x^3 + ax - 8 = 0$ và $2x^3 + ax - 4 = 0$

Khi $x \neq 0$

$$\text{Ta có } x^3 + ax - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 - x^3}{x} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{-8 - 2x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{4}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$				

Ta có $2x^3 + ax - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 - 2x^3}{x} = h(x)$

$h'(x) = \frac{-4 - 4x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	-
$h(x)$				

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow a \geq -6$ với $a \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Câu 24: (MĐ 104-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 - 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 23.

B. 12.

C. 24.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Xét $f(x) = x^4 - mx^2 - 64x$. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 2mx - 64 = 0 \Rightarrow m = 2x^2 - \frac{32}{x}$.

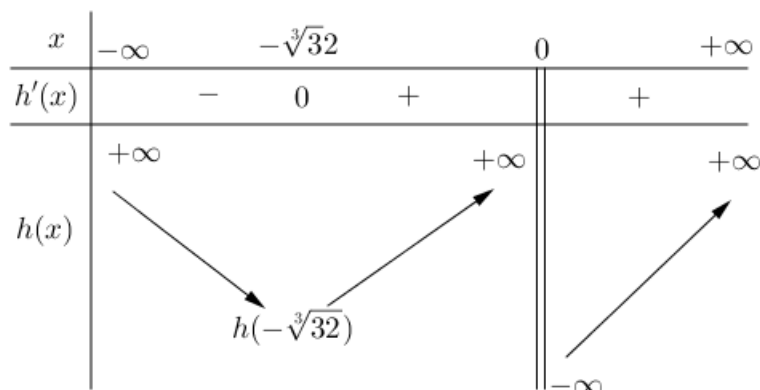
Đặt $g(x) = 2x^2 - \frac{32}{x} \Rightarrow g'(x) = 4x + \frac{32}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+
$g(x)$		24		

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - mx^2 - 64x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - mx - 64 = 0 \end{cases}$.

Xét $x^3 - mx - 64 = 0 \Rightarrow m = x^2 - \frac{64}{x}$.

Đặt $h(x) = x^2 - \frac{64}{x} \Rightarrow h'(x) = 2x + \frac{64}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{32}$.



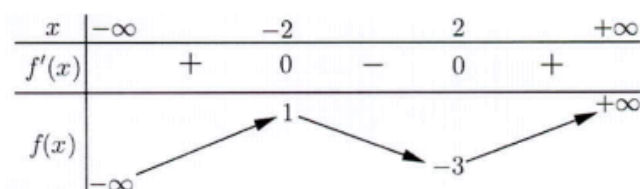
Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Suy ra yêu cầu bài toán trở thành hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị và phương trình $f(x) = 0$

có 2 nghiệm bội lẻ $\begin{cases} m \leq 24 \\ m \leq h(-\sqrt[3]{32}) \approx 30,23 \end{cases} \Rightarrow m \leq 24$.

Vì m nguyên dương nên có 24 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 25: (ĐTK 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. $x = -3$.

B. $x = 1$.

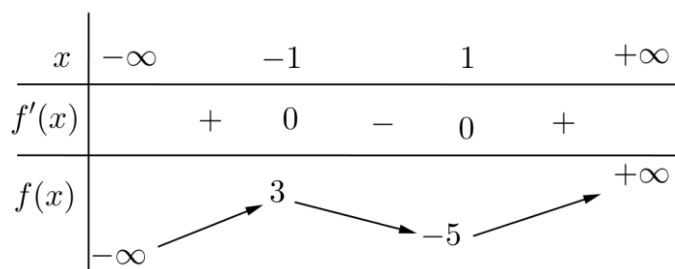
C. $x = 2$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Vì $f(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi hàm số qua $x = -2$ nên $x_{CD} = -2$.

Câu 26: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3.** **B. -1.** **C. -5.** **D. 1.**

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3.

Câu 27: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2.** **B. 3.** **C. 4.** **D. 5.**

Lời giải

Đạo hàm đổi dấu 4 lần nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 28: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	1	3	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 0.** **B. 3.** **C. 1.** **D. -1.**

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực tiểu là $y = 1$.

Câu 29: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

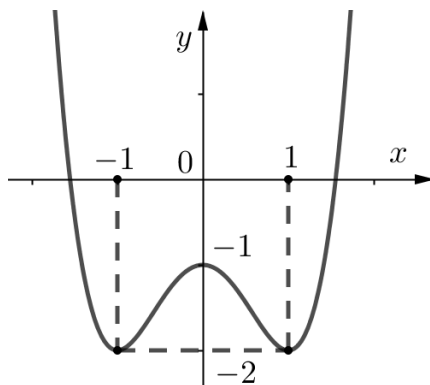
- A. 3.** **B. 4.** **C. 2.** **D. 5.**

Lời giải

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $y = f(x)$ đổi dấu khi qua $x = -2$; $x = -1$; $x = 2$; $x = 4$.

Do đó, hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = -2$.

D. $x = 0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có hai điểm cực trị tại $x = 1$ và $x = 5$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

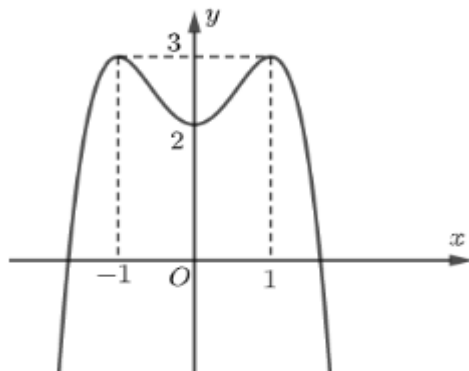
C. 0.

D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị là $x = 1$ và $x = 5$.

Câu 33: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:



A. $x = -1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có điểm cực tiểu là $x = 0$.

Câu 34: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	3	$-\infty$

Hỏi số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1.

B. 4.

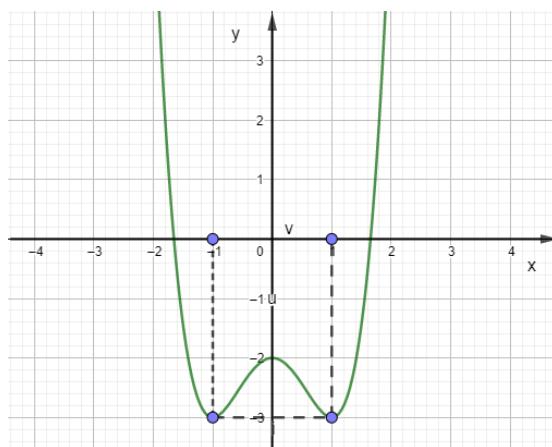
C. 3.

D. 2.

Lời giải

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 35: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x = 1$.

B. $x = -2$.

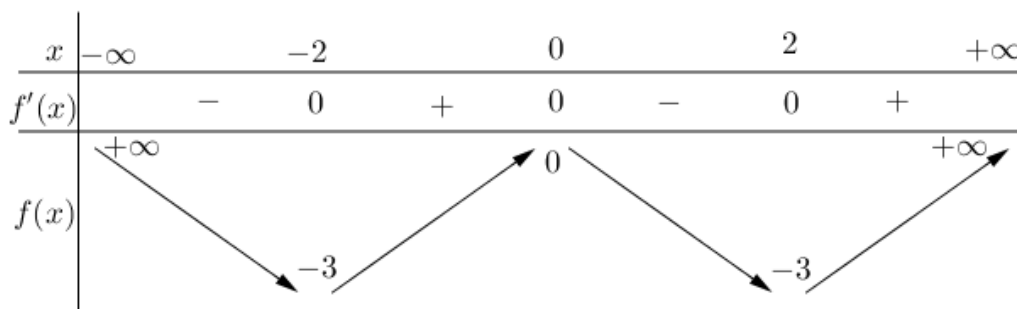
C. $x = 0$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

Câu 36: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 37: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	3	5	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Theo bảng xét dấu, ta thấy đạo hàm đổi dấu 4 lần nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 38: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$

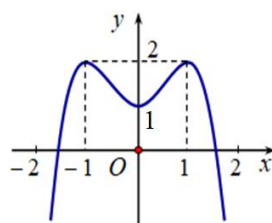
Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Quan sát bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại của hàm số là 3

Câu 39: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số là:



- A. $x = 0$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x = 0$.

Câu 40: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		↗ 2		↘ -5		↗ $+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. -5. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT ta có hàm số đạt giá trị cực tiểu $f(3) = -5$ tại $x = 3$

Câu 41: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		↘ -1		↗ 3		↘ $-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. -2. C. 3. D. -1.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -1.

Câu 42: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		↘ -3		↗ 2		↘ $-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y_{CD} = 2$.

Câu 43: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

$-\infty \nearrow 2 \searrow -3 \nearrow +\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3.

B. -3.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 44: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1) = 0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua các điểm $x = -1$, $x = 1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 45: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua các điểm $x = -1; x = 1$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 46: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Câu 47: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$-$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là:

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 0$, $f'(x)$ không xác định tại $x = -2; x = 1; x = 2, x = 3$. Nhưng có 2 giá trị $x = -2; x = 2$ mà qua đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Câu 48: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số có đúng một cực trị
 B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Chọn A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị

Chọn B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y = -1$ khi $x = 0$

Chọn C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Câu 49: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CD} = 4$

B. $y_{CD} = 1$

C. $y_{CD} = 0$

D. $y_{CD} = -1$

Lời giải

Chọn A

$y = x^3 - 3x + 2$ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ suy ra $y(-1) = 4$; $y(1) = 0$

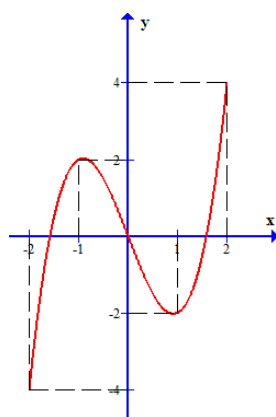
Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$; $y_{CD} = 4$.

Câu 50: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị, dấu $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

- Câu 51: (Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3. B. Cực tiểu của hàm số bằng 1.
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6. D. Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Cách 2.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}; x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{8}{(x + 1)^3}. \text{ Khi đó: } y''(1) = 1 > 0; y''(-3) = -1 < 0.$$

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

- Câu 52: (Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		3		0		$+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$ B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$
C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$ D. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

- Câu 53: (Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5

B. 3

C. 4

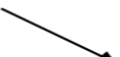
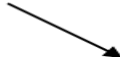
D. 2

Lời giải

Chọn B

Do đồ thị $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị $y = |f(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 54: (Mã 102, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			3			$+\infty$	
			0				0	

Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Hàm số có hai điểm cực tiểu

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0

C. Hàm số có ba điểm cực trị

D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3

Lời giải

Chọn B

Câu 55: (Mã 102, Năm 2017) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $Q(-1; 10)$

B. $M(0; -1)$

C. $N(1; -10)$

D. $P(1; 0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

Câu 56: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y			4		2
	2			-5	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có bốn điểm cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

C. Hàm số không có cực đại.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ thấy mệnh đề hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ đúng.

Câu 57: (Mã 103, Năm 2017) Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 9$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = 5$.

D. $S = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Nên $A(0;5), B(2;9) \Rightarrow \overline{AB} = (2;4) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

Phương trình đường thẳng AB : $y = 2x + 5$.

Diện tích tam giác OAB là: $S = 5$.

Câu 58: (Mã 104, Năm 2017) Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 59: (Tham khảo 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 1$

B. $x = 0$

C. $x = 5$

D. $x = 2$

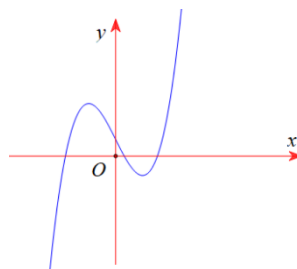
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ tại $x = 2$.

Nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Câu 60: (Mã 101, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2

B. 0

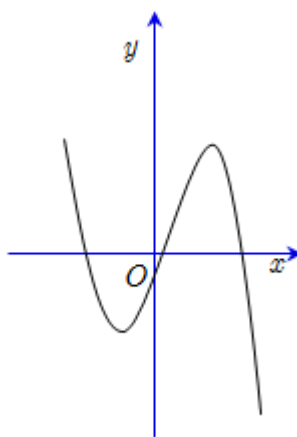
C. 3

D. 1

Lời giải

Chọn A

Câu 61: (Mã 102, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 0

B. 1

C. 3

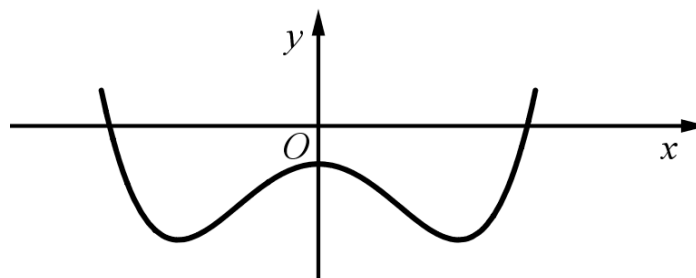
D. 2

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 62: (Mã 103, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



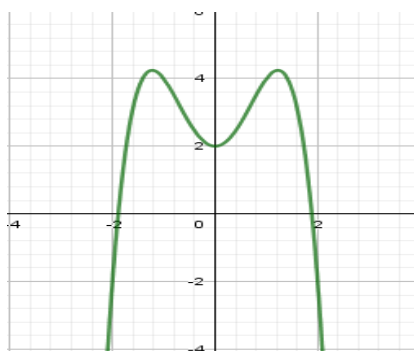
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn B

Câu 63: (Mã 104, Năm 2018) Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Lời giải

Chọn D

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 64: (Đề minh họa 1, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Câu 65: (Đề minh họa 1, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi đi qua các điểm nên hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 66: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$						
			-3		1		$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 67: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $f'(x) = x(x+2)^2$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm suy ra hàm số có một cực trị.

Câu 68: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Căn cứ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 69: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = x(x-2)^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

$\searrow$ $\nearrow$
 $-\infty$ $+\infty$

Vậy hàm số có một điểm cực trị.

Câu 70: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 3 -2 $+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

- Câu 71: (Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn C

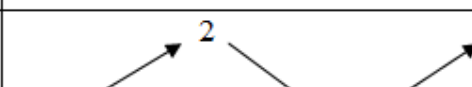
$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	+		
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

- Câu 72: (Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta thấy điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

- Câu 73: (Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = x(x+1)^2$ chỉ đổi dấu đúng một lần khi qua nghiệm $x = 0$. Suy ra, hàm số có đúng một điểm cực trị là $x = 0$.

- Câu 74: (Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

B. $m = -1$

C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn B

$y = x^4 + 2mx^2 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} (*)$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nghĩa là phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1); B(-\sqrt{-m}; 1-m^2); C(\sqrt{-m}; 1-m^2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{-m}; -m^2); \overrightarrow{AC} = (\sqrt{-m}; -m^2)$

Vì ΔABC vuông cân tại

$A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-m}^2 + m^2 \cdot m^2 = 0 \Leftrightarrow -|m| + m^4 = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$

Vậy với $m = -1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 75: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

A. $y(-2) = 2$.

B. $y(-2) = 22$.

C. $y(-2) = 6$.

D. $y(-2) = -18$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} (1) \text{ và } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 1; b = -3; c = 0; d = 2 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18$.

Câu 76: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại.

A. $1 \leq m \leq 3$.

B. $m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $1 < m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Hàm số không có cực đại tức là hàm số chỉ tuyến tính.

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến. Tức $\begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m-3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m \leq 3.$

Trường hợp 2: Hàm số nghịch biến. Tức $\begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m-3 \geq 0 \end{cases}$. Suy ra không tìm được m thỏa.

Câu 77: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 0.

B. 6.

C. -6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: A, B nằm khác phía với đường thẳng khi và chỉ khi $x_1x_2 < 0$ và chúng cách đều đường thẳng tức trung điểm AB thuộc đường thẳng đã cho.

Cách giải: Ta có: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x \Rightarrow y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1).$

Phương trình $y' = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x , có $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2).$

A, B nằm khác phía $\Leftrightarrow x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$

A, B cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$ suy ra trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y = 5x - 9$. Khi đó ta có: $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ hay $I\left(m; \frac{1}{3}m^3 - m\right).$

Ta có: $\frac{1}{3}m^3 - m = 5m - 9 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^3 - 6m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ \frac{1}{3}m^2 + m - 3 = 0 \end{cases}$

Suy ra $m_1 + m_2 + m_3 = 3 + \frac{-1}{\frac{1}{3}} = 0.$

Câu 78: (Mã 101, Năm 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$

B. $m = -7$

C. $m = 5$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4); y'' = 2x - 2m.$

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 (L) \\ m = 5 (TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 79: (Mã 103, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m > 0$.

B. $m < 1$.

C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

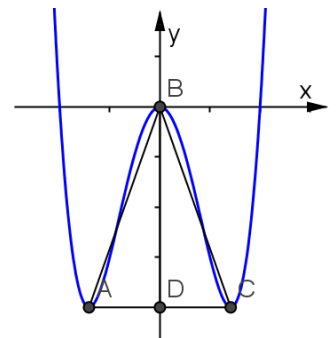
Điều kiện để hàm số có 3 cực trị là $m > 0$.

$$y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{m} \\ x_3 = \sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -m^2 \\ y_3 = -m^2 \end{cases}$$

Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân có đáy bằng $2\sqrt{m}$, đường cao bằng m^2 . (như hình minh họa)

Ta được $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \sqrt{m} \cdot m^2$. Để tam giác có diện tích nhỏ hơn

1 thì $\sqrt{m} \cdot m^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.



Câu 80: (Mã 104, Năm 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{3}{4}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1), B(1;-1)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Câu 81: (Mã 104, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

B. $m = -1; m = 1$.

C. $m = 1$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{cases} (m \neq 0)$$

Đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị $A(0; 4m^3)$ và $B(2m; 0)$.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |4m^3 \cdot 2m| = 4 \Leftrightarrow 4m^4 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 82: (Tham khảo 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3

B. 5

C. 6

D. 4

Lời giải.

Chọn D

$$y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi

$$\begin{cases} m > 0 \\ m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5. \text{ Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là } m = 1; m = 2; m = 3; m = 4.$$

Câu 83: (Mã 101, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3

B. 5

C. 4

D. Vô số

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4) = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-2)$.

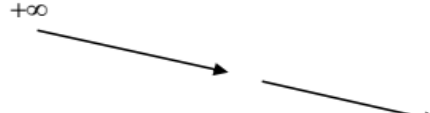
Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

+ TH1: Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 2$ hoặc $m = -2$

Với $m = 2$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = 2$ thỏa ycbt.

Với $m = -2$ thì $g(x) = 8x^4 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

Dựa vào BBT $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -2$ không thỏa ycbt.

+ TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 84: (Mã 102, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3

B. 2

C. Vô số

D. 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3(8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

*Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

*Nếu $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \end{cases}$, nhưng $x = 0$ là nghiệm bội chẵn nên

không phải cực trị.

*Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x = 0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Để $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m = 0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là $m = 0$ và $m = 1$.

Câu 85: (Mã 103, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 8

B. Vô số

C. 7

D. 9

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-4)x^4 - 4(m^2-16)x^3 = x^3 [8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)] = x^3 \cdot g(x)$

Với $g(x) = 8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)$.

• Trường hợp 1: $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Suy ra $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -4 \Rightarrow y' = 8x^4(x^3 - 5)$. Suy ra $x = 0$ không là điểm cực trị của hàm số.

• Trường hợp 2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì qua giá trị $x = 0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 86: (Mã 104, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 4

B. 7

C. 6

D. Vô số

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-3)x^4 - 4(m^2-9)x^3$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9) = 0 \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-3)$.

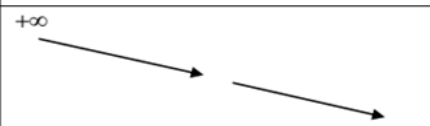
Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

$$\text{Với } m=-3 \text{ thì } g(x)=8x^4-30x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{15}{4}} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

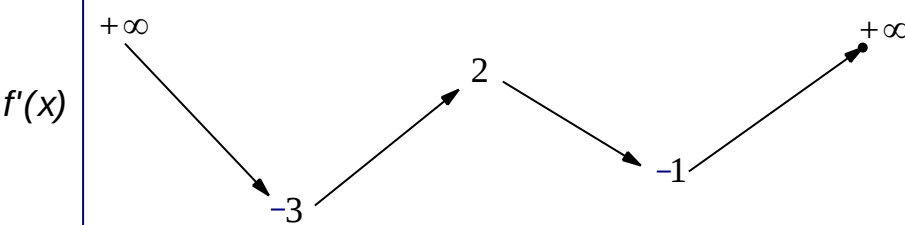
Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 87: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$
					

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3.

B. 9.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = (2x+2)f'(x^2+2x)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f'(x)$ ta được

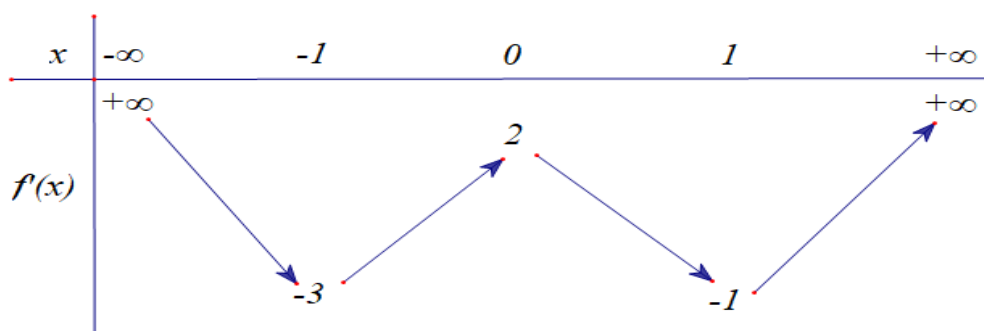
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = a \\ x^2 + 2x = b \\ x^2 + 2x = c \\ x^2 + 2x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ (x+1)^2 = a+1 \quad (1) \\ (x+1)^2 = b+1 \quad (2) \\ (x+1)^2 = c+1 \quad (3) \\ (x+1)^2 = d+1 \quad (4) \end{cases}, \text{ trong đó } a < -1 < b < 0 < c < 1 < d.$$

$$\text{Do } a < -1 < b < 0 < c < 1 < d \text{ nên } \begin{cases} a+1 < 0 \\ b+1 > 0 \\ c+1 > 0 \\ d+1 > 0 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình (2), (3), (4) mỗi phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt và khác nhau, cùng khác -1 . Suy ra phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 88: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

- A. 9. B. 5. **C. 7.** D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } y' = (8x-4)f'(4x^2-4x), y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-4=0 \\ f'(4x^2-4x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ 4x^2-4x=a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2-4x=b \in (-1; 0) \\ 4x^2-4x=c \in (0; 1) \\ 4x^2-4x=d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Ta có khi $x=\frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2-4x=-1$ và $f'(-1)=-3 \neq 0$

Mặt khác: $4x^2-4x=(2x-1)^2-1 \geq -1$ nên:

- $4x^2-4x=a$ vô nghiệm.
- $4x^2-4x=b$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- $4x^2-4x=c$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 .
- $4x^2-4x=d$ có 2 nghiệm phân biệt x_5, x_6 .

Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Cách 2:

Gọi m đại diện cho các tham số ta xét phương trình $4x^2-4x-m=0$ có $\Delta'=4(m+1)$,
 $\Delta'>0 \Rightarrow m>-1$.

Vậy với mỗi giá trị b, c, d thuộc khoảng đã cho phương trình $f'(4x^2-4x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 89: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$				2				$+\infty$
			-3				-1		

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(4x^2+4x)$ là

- A.** 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = (8x+4)f'(4x^2+4x); y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2+4x)=0 \\ 8x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2+4x)=0 \\ x_1=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$ nhận thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$.

Do đó $f'(4x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 + 4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2 + 4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2 + 4x = d \in (1; +\infty) \end{cases} (*)$. Lại có

$4x^2 + 4x = a$ vô nghiệm vì $4x^2 + 4x = (2x+1)^2 - 1 \geq -1, \forall x$;

$4x^2 + 4x = b \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2; \\ x = x_3 \end{cases}$

$4x^2 + 4x = c \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4; \\ x = x_5 \end{cases}$

$4x^2 + 4x = d \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_6; \\ x = x_7 \end{cases}$.

Vì $b \neq c \neq d$ do thuộc các khoảng khác nhau (như $(*)$) nên các nghiệm $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ đều khác nhau và khác $x_1 = -\frac{1}{2}$. Do đó $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên y' đổi dấu 7 lần suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 90: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3				$+\infty$
			-2			-2			

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

A. 11.

B. 9.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

Đạo hàm

$$g'(x) = 4x^3 [f(x+1)]^2 + 2x^4 f(x+1) f'(x+1) = 2x^3 f(x+1) [2f(x+1) + x f'(x+1)].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 f(x+1) = 0 \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x+1) = 0 \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \end{cases}.$$

$$+) f(x+1) = 0 (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4 - 10(x+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \approx 1,278 \\ x+1 \approx 0,606 \\ x+1 \approx -0,606 \\ x+1 \approx -1,278 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

$$+) 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \Rightarrow 2(5t^4 - 10t^2 + 3) + (t-1)(20t^3 - 20t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 1,199 \\ t \approx 0,731 \\ t \approx -0,218 \\ t \approx -1,045 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (*).

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Câu 91: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x-1)]^4$ là

A. 7.

B. 8.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$g'(x) = 2x \cdot [f(x-1)]^4 + 4x^2 f'(x-1) [f(x-1)]^3 = 2x \cdot [f(x-1)]^3 (f(x-1) + 2xf'(x-1))$$

$$\text{Vậy } g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x-1) = 0 \quad (1) \\ f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

Phương trình (2) có $f(x-1) = -2xf'(x-1) \Rightarrow f(x) = -2(x+1)f'(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm $f(x)$ là bậc bốn trùng phương nên ta có

$f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$ thay vào $f(x) = -2(x+1)f'(x)$ vô nghiệm

Vậy hàm $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 92: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -1 -1

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4[f(x-1)]^2$ là

A. 7.

B. 5.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 16x(x^2 - 1)$

Ta có $g'(x) = 2x^3 \cdot f(x-1) \cdot [2f(x-1) + x \cdot f'(x-1)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 & (1) \\ f(x-1) = 0 & (2) \\ 2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0 & (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $x = 0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x) = 0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình :

$$2f(x) + (x+1) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(4x^4 - 8x^2 + 3) + 16x(x+1)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 24x^4 + 16x^3 - 32x^2 - 16x + 6 = 0 \text{ có 4 nghiệm phân biệt.}$$

Để thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x) = 0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 93: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$			3			3	

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2[f(x+1)]^4$

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 2x[f(x+1)]^4 + 4x^2[f(x+1)]^3 \cdot f'(x+1) = 2x[f(x+1)]^3 \cdot [f(x+1) + 2x \cdot f'(x+1)]$$

$g'(x) = 0$ ta được

+ **TH1:** $x = 0$

$$+ \text{TH2: } f(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -2 \\ x = b \in (-2; -1) \\ x = c \in (-1; 0) \\ x = d > 0 \end{cases}$$

+ **TH3:** $f(x+1) + 2x \cdot f'(x+1) = 0$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số thỏa mãn là $f(x) = -5x^4 + 10x^2 - 2$

$$\Rightarrow f(x+1) + 2x \cdot f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow h(x) = f(x+1) + 2(x+1) \cdot f'(x+1) - 2f'(x+1) = 0$$

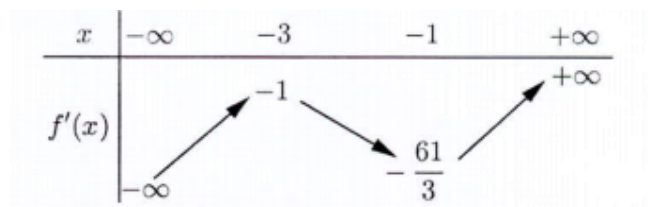
Với $t = x+1$ ta có: $h(t) = -5t^4 + 10t^2 - 2 + 2t(-20t^3 + 20t) - 2(-20t^3 + 20t) = 0$

$$\Leftrightarrow -45t^4 + 40t^3 + 50t^2 - 40t - 2 = 0$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra có 4 nghiệm $t \Rightarrow 4$ nghiệm x

Vậy có 9 cực trị.

Câu 94: (ĐTK 2020-2021) Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Ta có $f(x)$ bậc ba có 2 điểm cực trị là $x = -3, x = -1$ nên $f(x) = a(x+3)(x+1)$.

Suy ra $f(x) = a(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x) + b$.

Từ $f(-3) = -1$ và $f(-1) = -\frac{61}{3}$, giải ra $a = \frac{29}{2}, b = -1$ hay $f(x) = \frac{29}{2}(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x) - 1$.

Do đó $f(0) = -1 < 0$.

Đặt $h(x) = f(x^3) - 3x$ thì $h(x) = 3x^2 f(x^3) - 3$ nên $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^3) = \frac{1}{x^2}$. (*)

Trên $(-\infty; 0)$ thì $f(x) < 0$ nên $f(x^3) < 0, x < 0$, kéo theo (*) vô nghiệm trên $(-\infty; 0]$.

Xét $x > 0$ thì $f(x)$ đồng biến còn $\frac{1}{x^2}$ nghịch biến nên (*) có không quá 1 nghiệm. Lại có

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x^3) - \frac{1}{x^2}) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x^3) - \frac{1}{x^2}) = +\infty$ nên (*) có đúng nghiệm $x = c > 0$. Xét bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$		0	c		$+\infty$
$h(x)$		$-$		0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$					
				$h(c)$		
						$+\infty$

Vì $h(0) = f(0) = 0$ nên $h(c) < 0$ và phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt, khác c . Từ đó $|h(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 95: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 27.

B. 31.

C. 28.

D. 30.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4-m)x$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 - m$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4.$$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$ có 3 nghiệm dương phân biệt. (*)

Xét hàm số $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$.

Ta có: $h'(x) = 12x^2 - 72x + 60$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	1		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	4	32		-96		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có (*) $\Leftrightarrow 4 < m < 32$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5; 6; 7; \dots; 31\}$.

Vậy có 27 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 96: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = (x-7)(x-3)(x+3) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=3 \\ x=-3 \end{cases}.$$

$$g'(x) = \frac{x^3+5x}{|x^3+5x|} \cdot (3x^2+5) f'(|x^3+5x|+m) = \frac{x(x^2+5)}{|x^3+5x|} \cdot (3x^2+5) f'(|x^3+5x|+m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x^3 + 5x| + m) = 0.$$

Đạo hàm không xác định tại $x = 0$.

Do đó điều kiện để $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị là phương trình $f'(|x^3 + 5x| + m) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

$$f'(|x^3+5x|+m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3+5x|+m=7 \\ |x^3+5x|+m=3 \\ |x^3+5x|+m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3+5x|-7=-m \\ |x^3+5x|-3=-m \\ |x^3+5x|+3=-m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f'(x^3 + 5x + m) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0 $\Leftrightarrow -m > -7 \Leftrightarrow m < 7$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 97: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 8)(x^2 - 9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 5. B. 7. C. 8. D. 6.

Lời giải

$$\begin{aligned} g(x) &= f(|x^3 + 6x| + m) \Rightarrow g'(x) = (|x^3 + 6x| + m)' \cdot f'(|x^3 + 6x| + m) \\ &= \frac{(x^3 + 6x) \cdot (3x^2 + 6)}{|x^3 + 6x|} \cdot f'(|x^3 + 6x| + m). \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^3 + 6x + m) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f'(|x^3 + 6x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 6x| + m = 8 \\ |x^3 + 6x| + m = 3 \\ |x^3 + 6x| + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 6x| = 8 - m \\ |x^3 + 6x| = 3 - m \\ |x^3 + 6x| = -3 - m \end{cases}.$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 6x$, vì $h'(x) = 3x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x) = |h(x)| = |x^3 + 6x|$ như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$k(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi phương trình $f'(|x^3 + 6x| + m) = 0$ có ít nhất hai nghiệm khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $8 - m > 0$ hay $m < 8$.

Kết hợp điều kiện m nguyên dương, ta được $m \in \{1; 2; 3; \dots; 7\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 98: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-10)(x^2-25), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 8x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9.

B. 25.

C. 5.

D. 10.

Lời giải

Cách 1:

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $g(-x) = f(|-x^3 - 8x| + m) = f(|x^3 + 8x| + m) = g(x)$, do đó $g(x)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $h(x) = f(x^3 + 8x + m)$. Theo bài ra ta có $2a+1 \geq 3 \Leftrightarrow a \geq 1$, vì vậy ta cần tìm m để hàm số $h(x)$ có ít nhất một điểm cực trị dương.

Ta có $f'(x) = (x-10)(x-5)(x+5) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10, x = \pm 5$.

$$h'(x) = (3x^2 + 8)f'(x^3 + 8x + m), h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8x + m = 10 & (1) \\ x^3 + 8x + m = 5 & (2) \\ x^3 + 8x + m = -5 & (3) \end{cases}.$$

Đặt $u(x) = x^3 + 8x + m, u'(x) = 3x^2 + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$u'(x)$		+
$u(x)$	m	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1), (2) và (3) nếu có nghiệm $x > 0$ thì đó là nghiệm duy nhất.

Phương trình $h'(x) = 0$ có nghiệm $x > 0$ khi và chỉ khi ít nhất một trong ba phương trình (1), (2) (3) có nghiệm $x > 0$, điều này tương đương với $m < \max\{-5; 5; 10\} = 10$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; \dots; 9\}$, vậy có 9 giá trị nguyên dương của tham số m cần tìm.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-10)(x^2-25) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=5 \\ x=-5 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } u = |x^3 + 8x| + m = |x|(x^2 + 8) + m \Rightarrow u' = \begin{cases} 3x^2 + 8 > 0 & \text{khi } x > 0 \\ -3x^2 - 8 < 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $u = |x^3 + 8x| + m$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'	-		+
u			

$y=10$

$$\text{Ta có } y = f(u) \Rightarrow y' = u' \cdot f'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=10 \\ u=5 \\ u=-5 \end{cases} \quad (1).$$

Khi đó, để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 8x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì (1) có ít nhất hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

Suy ra $m < 10$. Mà m là số nguyên dương nên ta có: $m \in \{1; 2; \dots; 9\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên dương của tham số m cần tìm.

Câu 99: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x) = (x-9)(x^2-16), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số } m \text{ để hàm số}$$

$$g(x) = f(|x^3 + 7x| + m) \text{ có ít nhất 3 điểm cực trị?}$$

A. 16.

B. 9.

C. 4.

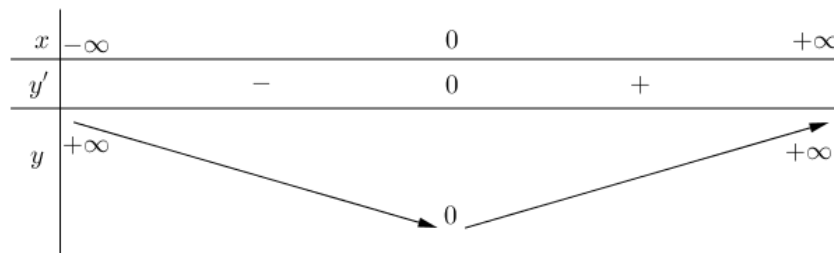
D. 8.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(|x^3 + 7x| + m) \cdot \frac{x(x^2 + 7)}{|x^3 + 7x|} \cdot (3x^2 + 7)$

Xét hệ pt:
$$\begin{cases} |x^3 + 7x| = -4 - m \\ |x^3 + 7x| = 4 - m \\ |x^3 + 7x| = 9 - m \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có BBT hàm số $y = |x^3 + 7x|$



Ycbt $\Leftrightarrow 9 - m > 0 \Leftrightarrow m \in \{1; 2; \dots; 8\}$

Câu 100: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (3 - m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25.

B. 27.

C. 26.

D. 28.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m$.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị thì hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (3 - m)x$ có đúng 3 cực trị dương.

Hay $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Đặt $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 \Rightarrow h'(x) = 12x^2 - 72x + 60$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	1		5	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	3 31 -97 $+\infty$ </				

Từ BBT ta có $3 < m < 31$ và m nguyên nên có 27 giá trị nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 101: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (4-m)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25.

B. 22.

C. 26.

D. 21.

Lời giải

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương

Đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt là nghiệm đơn.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 - m = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 = m$$

$$\text{Đặt } h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 12x^2 - 60x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$	
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$						

$-\infty \nearrow 4 \nearrow 26 \searrow -28 \nearrow +\infty$

Suy ra để $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi $4 < m < 26$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị.

Câu 102: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 21.

B. 25.

C. 24.

D. 22.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 - m$$

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ gồm phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ bên phải trục tung và phần đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ bên phải trục tung sang bên trái qua trục tung. Do đó, hàm số

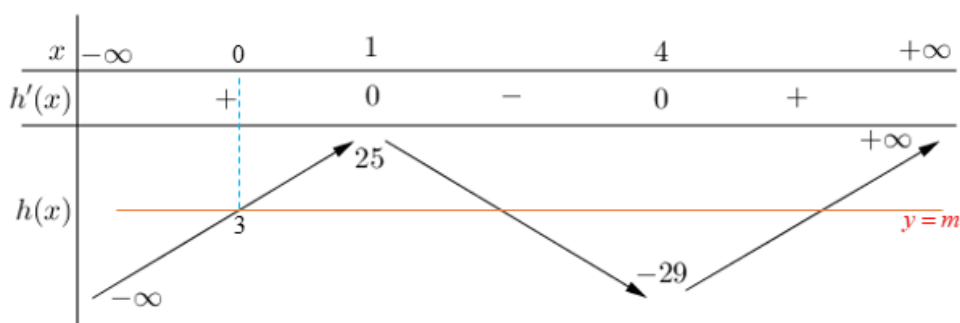
$g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương hay phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt

Xét phương trình

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 - m = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 = m \end{aligned}$$

Đặt $h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3$ ta có $h'(x) = 12x^2 - 60x + 48$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên



Từ BBT ta có phương trình $f'(x) = m$ có ba nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 3 < m < 25$

Vậy $m \in \{4; 5; \dots; 24\}$, có 21 số nguyên m thỏa mãn bài toán.